Доклады Национальной академии наук Беларуси

2016 май–июнь Том 60 № 3

УДК 517.958

Академик В. И. КОРЗЮК[1], *С. Н. НАУМОВЕЦ*[2]

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОДНЫМИ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

[1]*Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь*
korzyuk@bsu.by
[2]*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*
e-cveta@tut.by

В данной работе рассмотрена смешанная задача, где в качестве одного из граничных условий задана производная искомой функции произвольного порядка.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, гиперболические уравнения, частные производные, граничные условия, условия Коши, условия согласования, классическое решение.

V. I. KORZYUK, S. N. NAUMAVETS

CLASSICAL SOLUTION OF A MIXED PROBLEM FOR A ONE-DIMENSIONAL WAVE EQUATION WITH HIGHER-ORDER DERIVATIVES IN THE BOUNDARY CONDITIONS

[1]*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*
korzyuk@bsu.by
[2]*Belarusian State University, Minsk, Belarus*
e-cveta@tut.by

In this article we consider the mixed problem where the derivative of the unknown function of arbitrary order is set as one of the boundary conditions.

Keywords: differential equations, hyperbolic equations, partial derivatives, boundary conditions, Cauchy conditions, agreement conditions, classical solution.

Введение. Классическим решениям смешанных и других задач для одномерного волнового уравнения, заданного в полуполосе двумерной плоскости, посвящены многие статьи [1–5]. При исследовании этих задач методом характеристик построены решения в аналитическом виде. Однако во всех этих случаях порядок производных, входящих в граничные и интегральные условия, не превосходит порядка уравнения. Представляют интерес задачи для уравнений гиперболического типа, для которых задаются граничные условия с производными любого высокого порядка. Исследования такого рода задач не проводились и другими методами (например, сильные, обобщенные решения функциональными методами, методами Фурье, Галеркина и др.).

1. Постановка задачи. В замыкании $\overline{Q}=[0,\infty)\times[0,l]$ области $Q=(0,\infty)\times(0,l)$ двух независимых переменных $\boldsymbol{x}=(x_0,x_1)\in\overline{Q}\subset\mathbb{R}^2$ задано одномерное волновое уравнение

$$Lu=(\partial_{x_0}^2 u-a^2\partial_{x_1}^2 u)(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\overline{Q},\tag{1}$$

где a^2, l – положительные действительные числа; $\partial_{x_j}^2=\partial^2/\partial x_j^2$, $j=0,1$. К уравнению (1) на части границы ∂Q области Q присоединяются условия Коши

$$u(0,x_1)=\varphi(x_1),\quad \partial_{x_0}u(0,x_1)=\psi(x_1),\quad x_1\in[0,l]\tag{2}$$

и граничные условия

$$\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{\alpha}} u(x_0,0)=\mu^{(1)}(x_0), \quad u(x_0,l)=\mu^{(2)}(x_0), \quad x_0\in[0,\infty), \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_0,\alpha_1)$ – мультииндекс; $\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{\alpha}}=\partial_{x_0}^{\alpha_0}\partial_{x_1}^{\alpha_1}=\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}/\partial x_0^{\alpha_0}\partial x_1^{\alpha_1}, |\boldsymbol{\alpha}|=\alpha_0+\alpha_1$.

Здесь для заданных функций $f:\overline{Q}\ni \boldsymbol{x}\to f(\boldsymbol{x})$, $\varphi:[0,l]\ni x_1\to\varphi(x_1)$, $\psi:[0,l]\ni x_1\to\psi(x_1)$, $\mu^{(j)}:[0,\infty)\ni x_0\to\mu^{(j)}(x_0)$, $j=1,2$, гладкость которых будет указана ниже.

Задача (1)–(3) в случае $\boldsymbol{\alpha}=(0,0)$ (первая смешанная задача) рассмотрена в [1; 2], в случае $\boldsymbol{\alpha}=(0,1)$ (вторая смешанная задача) – в [5]. Здесь предполагается, что порядок $|\boldsymbol{\alpha}|$ производной $\boldsymbol{D}^{\alpha} u$ функции u больше или равен двум.

2. Сведение задачи к случаю однородного уравнения. Общее решение уравнения (1) представляет собой [6] сумму

$$u(\boldsymbol{x})=u^{(0)}(\boldsymbol{x})+v(\boldsymbol{x}), \tag{4}$$

где $u^{(0)}$ – общее решение однородного уравнения

$$(\partial_{x_0}^2 u^{(0)}-a^2\partial_{x_1}^2 u^{(0)})(\boldsymbol{x})=0, \tag{5}$$

v – частное решение неоднородного уравнения (1).

Функция v определяется формулой

$$v(\boldsymbol{x})=\int_0^{x_0} w(x_0-\tau,\tau,x_1)\,d\tau, \tag{6}$$

$w(x_0,\tau,x_1)$ – решение уравнения (5) относительно независимых переменных x_0 и x_1, удовлетворяющее условиям Коши

$$w(0,\tau,x_1)=0,\ \partial_{x_0} w(0,\tau,x_1)=f(\tau,x_1), \qquad \tau\in[0,\infty),\ x_1\in[0,l],$$

где f – правая часть уравнения (1) (см. [4]). Значения функции w можно записать в явном виде через функцию f [4], а именно

$$v(\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{2}\int_0^{x_0} G^{(j)}(x_1+(-1)^j a(x_0-\tau),\tau)\,d\tau, \tag{7}$$

где

$$G^{(j)}(z,\tau)=\begin{cases}\dfrac{(-1)^j}{2a}\displaystyle\int_0^z f(\tau,\xi)\,d\xi, & z\in[0,l],\\ G^{(j,1)}(z,\tau), & z\in D(g^{(j)})\setminus[0,l],\end{cases} \tag{8}$$

$$G^{(1,1)}(z,\tau)=-\frac{1}{2a}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k!}\partial_z^k f(\tau,z)|_{z=0}\, z^{k+1},$$
$$G^{(1,2)}(z,\tau)=\frac{1}{2a}\int_0^l f(\tau,\xi)\,d\xi+\frac{1}{2a}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k!}\partial_z^k f(\tau,z)|_{z=l}\,(z-l)^{k+1}, \tag{9}$$

$m=|\boldsymbol{\alpha}|=\alpha_0+\alpha_1$, если $|\boldsymbol{\alpha}|\ge 2$, и $m=2$, если $|\boldsymbol{\alpha}|<2$; $D(g^{(1)})=(-\infty,l]$, $D(g^{(2)})=[0,\infty)$.

Л е м м а 1. *Если функция f принадлежит классу $C^{0,m-1}(\overline{Q})$, то функция v, определяемая формулами (6)–(9), принадлежит классу $C^m(\overline{Q})$, является решением уравнения (1) и удовлетворяет однородным условиям Коши*

$$v(0,x_1)=\partial_{x_0}v(0,x_1)=0,$$

где $C^{0,m-1}(\bar{Q})$ *– множество непрерывных функций на* $\bar{Q}$ *и непрерывно дифференцируемых по* x_1 *до порядка* $m-1$, $C^m(\bar{Q})$ *– множество непрерывно дифференцируемых до порядка* m *функций, заданных на множестве* $\bar{Q}$.

Доказательство леммы 1 проводится непосредственной проверкой всех ее утверждений, используя явный вид задания функции v с помощью формул (6)–(9).

3. Задача для однородного уравнения (5). В качестве классического решения задачи (1)–(3) берется функция $u\in C^m(\bar{Q})$, которая удовлетворяет условиям (2) и (3). Согласно (4) и лемме 1, если $f\in C^{0,m-1}(\bar{Q})$, то задача (1)–(3) сводится к отысканию функции $u^{(0)}\in C^m(\bar{Q})$, которая является решением однородного уравнения (5) и удовлетворяет условиям Коши (2) и граничным условиям

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u^{(0)}(x_0,0)&=\mu^{(1)}(x_0)-\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{\alpha}}v(x_0,0)=\tilde{\mu}^{(1)}(x_0),\\ u^{(0)}(x_0,l)&=\mu^{(2)}(x_0)-v(x_0,l)=\tilde{\mu}^{(2)}(x_0).\end{aligned}\tag{10}$$

Отметим, что решение $u^{(0)}$ будет из класса $C^m(\bar{Q})$, если заданные функции кроме требований гладкости $f,\varphi,\psi,\tilde{\mu}^{(j)}$ или $\mu^{(j)}$, $j=1,2$, должны удовлетворять условиям согласования для точек (0, 0) и (0, l). Эти условия будут сформулированы ниже.

Общее решение уравнения (5) представляет собой [6; 7] сумму двух функций

$$u^{(0)}(\boldsymbol{x})=g^{(1)}(x_1-ax_0)+g^{(2)}(x_1+ax_0),\tag{11}$$

где $g^{(j)}$ – произвольные функции из класса $C^m(D(g^{(j)}))$. Области определения их как функций одного независимого переменного z следующие: $D(g^{(1)})=(-\infty,l]\subset\mathbb{R}$, $D(g^{(2)})=[0,\infty)\subset\mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}\in\bar{Q}$. Из условий Коши находим значения $g^{(j)}(z)$ функций $g^{(j)}$, которые определяются формулами [8]

$$g^{(j)}(z)=g^{(j,\,0)}(z)=\frac{1}{2}\varphi(z)+\frac{(-1)^j}{2a}\int\limits_0^z\psi(\xi)d\xi+(-1)^jC,\ \ z\in[0,l],\tag{12}$$

где C – произвольная постоянная из множества действительных чисел $\mathbb{R}$.

Далее значения $g^{(j)}(z)$ для $z\in D(g^{(j)})\setminus[0,l]$ определяются из граничных условий (10). Удовлетворяя первому граничному условию, получаем уравнение

$$(-1)^{\alpha_0}a^{\alpha_0}d^{|\boldsymbol{\alpha}|}g^{(1)}(z)+a^{\alpha_0}d^{|\boldsymbol{\alpha}|}g^{(2)}(-z)=\tilde{\mu}^{(1)}\left(-\frac{z}{a}\right),\ \ z\in[-l,0],$$

или

$$d^{|\boldsymbol{\alpha}|}g^{(1)}(z)=(-1)^{\alpha_0}\frac{1}{a^{\alpha_0}}\tilde{\mu}^{(1)}\left(-\frac{z}{a}\right)+(-1)^{\alpha_0+1}d^{|\boldsymbol{\alpha}|}g^{(2)}(-z),\tag{13}$$

где $d^{|\boldsymbol{\alpha}|}$ – производная порядка $|\ \ |$ по аргументу, от которого зависит функция. Интегрируя уравнение (13), получим

$$g^{(1)}(z)=(-1)^{\alpha_1+1}g^{(2)}(-z)+(-1)^{\alpha_0}\frac{1}{a^{\alpha_0}(|\boldsymbol{\alpha}|-1)!}\int\limits_0^z\tilde{\mu}^{(1)}\left(-\frac{\tau}{a}\right)(z-\tau)^{|\boldsymbol{\alpha}|-1}d\tau+\sum_{k=0}^{|\boldsymbol{\alpha}|-1}C^{(k)}\frac{1}{k!}z^k\tag{14}$$

для $z\in D(g^{(\ )})\setminus[0,l]$, где $C^{(k)}$ – произвольные константы из $\mathbb{R}$.

Удовлетворяя функцию (11) второму из условий (10), получим уравнение

$$g^{(2)}(z)=\tilde{\mu}^{(2)}\left(\frac{l-z}{a}\right)-g^{(1)}(2l-z),\ z\in D(g^{(1)})\setminus[0,l]. \tag{15}$$

Находим решения уравнений (14) и (15), используя уже известные решения $g^{(j,0)}(z)$. Из (14) находим

$$\begin{gathered}g^{(1)}(z)=g^{(1,k)}(z)=(-1)^{\alpha_1+1}g^{(2,k-1)}(-z)+(-1)^{\alpha_0}\frac{1}{a^{\alpha_0}(|\boldsymbol{\alpha}|-1)!}\int_0^z(z-\tau)^{|\boldsymbol{\alpha}|-1}\tilde{\mu}^{(1)}\left(-\frac{\tau}{a}\right)d\tau+\\ \sum_{i=0}^{|\boldsymbol{\alpha}|-1}C^{(i,k)}\frac{1}{i!}z^i,\quad z\in[-kl,-(k-1)l],\quad k=1,2,....\end{gathered} \tag{16}$$

Аналогично, из уравнения (15) имеем соотношения

$$g^{(2)}(z)=g^{(2,k)}(z)=\tilde{\mu}^{(2)}\left(\frac{l-z}{a}\right)-\mathrm{g}^{(1,k-1)}(2l-z),\quad z\in[kl,(k+1)l],\quad k=1,2,\dots . \tag{17}$$

В уравнениях (16) и (17) присутствуют функции от переменных со сдвигом. Поэтому, начиная с формул (12), в которых $g^{(j,0)}$ уже определены на отрезке $[0,l]$ через заданные функции, попеременно на отрезках длиной l из соотношений (16) и (17) находим значения $g^{(j)}(z)$ функций $g^{(j)}$ на всех областях их определения $D(g^{(j)}),\ j=1,2.$

Было отмечено ранее, что для $\boldsymbol{\alpha}=(0,0)$ классическое решение задачи (1)–(3) найдено в [1; 2], для $\boldsymbol{\alpha}=(0,1)$ – в [5]. Если $\boldsymbol{\alpha}=(1,0),$ то результаты аналогичны как и в [7]. Поэтому теперь будет рассмотрена задача (5), (2), (10) или задача (1)–(3) для $|\boldsymbol{\alpha}|=m=2,3,....$

Возвращаемся к исследованию системы (16), (17). Решение (11) должно принадлежать $C^m(\bar{Q}).$ Из этого требования следует, что функции φ,ψ и $\mu^{(j)}$ $(j=1,2)$ должны быть достаточно гладкими и аналитические выражения $g^{(j,k)}(z),\ j=1,2,\ k=0,1,...,$ и их производные должны совпадать в общих точках соприкосновения, т. е. должны выполняться равенства

$$d^pg^{(1,k)}(z)|_{z=-kl}=d^pg^{(1,k+1)}(z)|_{z=-kl},\ k=0,1,...,\ p=0,1,...,m, \tag{18}$$

$$d^pg^{(2,k-1)}(z)|_{z=kl}=d^pg^{(2,k)}(z)|_{z=kl},\ k=1,2,...,\ p=0,1,...,m, \tag{19}$$

где $d^p=d^p/dz^p$.

Л е м м а 2. *Если функции* $\varphi\in C^m([0,l]),\ \ \psi\in C^{m-1}([0,l]),\ \ \tilde{\mu}^{(j)}\in C^m([0,\infty]),\ \ j=1,2,$ *то* $g^{(1,k)}\in C^m([-kl,-(k-1)l]),\ g^{(2,k)}\in C^m([kl,(k+1)l]),\ k=1,2,....$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть k = 1. Из формул (12) видно, что при выполнении условий леммы 2 $g^{(j,0)}\in C^m([0,l]),\ \ j=1,2.$ Для других k = 2, 3, ... утверждения леммы следуют из формул (16) и (17).

Л е м м а 3. *Равенства (18) выполняются для всех* $k=0,1,2,...,$ *а равенства (19) для* $k=1,2,...$ *тогда и только тогда, когда (18) выполняются только для* k = 0, *а (19) – для* k = 1. *При этом произвольные постоянные* $C^{(i,k)}$ *в формулах (16) должны быть одни и те же для всех* $k=1,2,...,$ *т. е.* $C^{(i,k)}=C^{(i)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если равенства (18) и (19) выполняются для всех указанных в лемме значений k, то они выполняются и, в частности, для k = 0 и k = 1 соответственно.

Обратно, пусть равенства (18) выполняются для $k = 0$, а (19) – для $k = 1$. Пусть $g^{(2,0)}(l) = g^{(2,1)}(l)$. Тогда из (16) имеем равенство

$$g^{(1,1)}(-l) - g^{(1,2)}(-l) = \sum_{i=0}^{|\alpha|-1} (C^{(i,1)} - C^{(i,2)}) \frac{1}{i!}(-l)^i. \tag{20}$$

Для производных имеем равенства

$$d^p g^{(1,1)}(-l) - d^p g^{(1,2)}(-l) = \sum_{i=p}^{|\alpha|-1} (C^{(i,1)} - C^{(i,2)}) \frac{p!}{i!}(-l)^{i-p}, \quad p = 1,\dots,|\alpha|-1, \tag{21}$$

и

$$d^m g^{(1,1)}(-l) - d^m g^{(1,2)}(-l) = 0.$$

Равенства (20) и (21) равны нулю тогда и только тогда, когда $C^{(i,1)} = C^{(i,2)} = C^{(i)}$. Здесь рассуждения начинаем с $p = |\alpha| - 1$ и последовательно приходим к равенству (20).

Аналогично доказываем равенства (19) для $k = 2$.

Затем проводим доказательство утверждений леммы 3 в случае $k = 2$ и равенств непрерывности (18). Применяя метод математической индукции, доказывается утверждение леммы 3 для любых $k = 1, 2, 3, \dots$ в случае равенств (18) и любых $k = 2, 3, \dots$ и равенств (19).

Выпишем условия согласования заданных функций задачи (5), (2), (10), которые являются необходимыми и достаточными для выполнения равенств (18), если $k = 0$ и (19) – $k = 1$.

Итак,

$$d^p g^{(1,1)}(0) = (-1)^{\alpha_1+1+p} d^p g^{(2,0)}(0) + C^{(p)} = d^p g^{(1,0)}(0), \quad p = \overline{0, |\alpha|-1}, \tag{22}$$

$$d^m g^{(1,1)}(0) = (-1)^{\alpha_0+1} d^m g^{(2,0)}(0) + (-1)^{\alpha_0} \frac{1}{a^{\alpha_0}} \tilde{\mu}^{(1)}(0) = d^m g^{(1,0)}(0), \tag{23}$$

$$d^p g^{(2,1)}(l) = (-1)^p \frac{1}{a^p} d^p \tilde{\mu}^{(2)}(0) + (-1)^{p+1} d^p g^{(1,0)}(l) = d^p g^{(2,0)}(l), \quad p = \overline{0, m}. \tag{24}$$

В соотношения (22)–(24) подставляем значения функций (12) и их производных в точках $z = 0$ и $z = l$. Из равенств (22) получаем следующие значения констант:

$$C^{(0)} = \begin{cases} -2C, & \text{если } \alpha_1 \text{ – нечётное число,} \\ \varphi(0) - 2C, & \text{если } \alpha_1 \text{ – чётное число,} \end{cases} \tag{25}$$

$$C^{(p)} = \begin{cases} -\dfrac{1}{a} d^{p-1}\psi(0), & \text{если } \alpha_1 \text{ – нечётное число, } p = \overline{1, |\alpha|-1}, \\ d^p \varphi(0), & \text{если } \alpha_1 \text{ – чётное число, } p = \overline{1, |\alpha|-1}. \end{cases}$$

Из равенства (23) следует условие согласования

$$\begin{aligned} &\frac{1}{a} d^{m-1}\psi(0) - \frac{1}{a^{\alpha_0}} \tilde{\mu}^{(1)}(0) = 0, \quad \alpha_0 \text{ – нечётное число,} \\ &-d^m \varphi(0) + \frac{1}{a^{\alpha_0}} \tilde{\mu}^{(1)}(0) = 0, \quad \alpha_0 \text{ – чётное число.} \end{aligned} \tag{26}$$

Аналогично доказывается, что равенства (24) эквивалентны условиям согласования

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{a^p}d^p\tilde{\mu}^{(2)}(0)-\frac{1}{a}d^{p-1}\psi(l)=0, \quad p-\text{нечётное число},\\ &-\frac{1}{a^p}d^p\tilde{\mu}^{(2)}(0)-d^{p-1}\varphi(l)=0, \quad p-\text{чётное число}, \ p=\overline{0,m}.\end{aligned} \tag{27}$$

Результаты проведенных последних рассуждений можно сформулировать в виде следующей леммы.

Л е м м а 4. *Пусть* $m\ge 2$. *Если функции* $\varphi\in C^m([0,l])$, $\psi\in C^{m-1}([0,l])$, $\tilde{\mu}^{(1)}\in C^m([0,\infty))$, $\tilde{\mu}^{(2)}\in C^m([0,\infty))$ *и выполняются однородные условия согласования (26) и (27), то функции* $g^{(j)}(j=1,2)$, *определяемые формулами (12), (16) и (17) принадлежат классу* $C^m(D(g^{(j)}))$, *имеют вид*

$$g^{(j)}(z)=\tilde{g}^{(j)}(z)+(-1)^jC, \ \ j=1,2,$$

где C *– произвольная из* $\mathbb{R}$ *постоянная, функции* $\tilde{g}^{(j)}$ *определяются единственным образом, константы* $C^{(i,k)}=C^{(i)}$, $k=1,2,3,...$, $i=\overline{0,|\alpha|-1}$, *в (16) определяются формулами (25).*

Доказательство следует из предыдущих рассуждений. Кроме того, отметим, что условия согласования (26) и (27) являются необходимыми и достаточными, чтобы функции $g^{(j)}$ принадлежали классу $C^m(D(g^{(j)}))$, функции $\tilde{g}^{(j)}$ определялись единственным образом.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $m\ge 2$. *Если функции* $\varphi\in C^m([0,l])$, $\psi\in C^{m-1}([0,l])$, $\tilde{\mu}^{(1)}\in C^1([0,\infty))$, $\tilde{\mu}^{(2)}\in C^m([0,\infty))$, *то функция вида (11) является единственным классическим решением из класса* $C^m(\bar{Q})$ *задачи (5), (2), (10) тогда и только тогда, когда выполняются однородные условия согласования (26), (27), константы* $C^{(i)}=C^{(i,k)}$, $k=1,2,3,...$, $i=\overline{0,|\alpha|-1}$, *вычисляются по формулам (25).*

Доказательство теоремы 1 следует из лемм 2–4.

4. Задача (1)–(3). Так как, согласно теореме 1, существует единственное классическое решение задачи (5), (2), (10), то существует и классическое решение задачи (1)–(3). Чтобы сформулировать в теоремах и обозначениях задачи (1)–(3) от функций $\tilde{\mu}^{(j)}$ перейдем к функциям $\mu^{(j)}$ и f согласно формулам (10).

Если в условиях согласования (27) $\tilde{\mu}^{(2)}(0)$ представить в виде $\mu^{(2)}(x_0)-v(x_0,l)$ и вычислить от v производные согласно представлению (15), то эти условия согласования запишутся в виде

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{a^p}d^p\mu^{(2)}(0)+\frac{p-1}{2}\partial_{x_0}^{p-2}f(0,l)-\frac{1}{a}d^{p-1}\psi(l)=0, \quad p-\text{нечётное число},\\ &\frac{1}{a^p}d^p\mu^{(2)}(0)-\frac{p}{2}\partial_{x_0}^{p-2}f(0,l)-d^p\varphi(l)=0, \quad p-\text{чётное число}.\end{aligned} \tag{28}$$

Аналогично формулы условий согласования (26) будут

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a}d^{m-1}\psi(0)-\frac{1}{a^{\alpha_0}}\mu^{(1)}(0)+\frac{\alpha_0-1}{a}\partial_{x_0}^{\alpha_0-2}\partial_{x_1}^{\alpha_1}f(0,0)=0, \quad \alpha_0-\text{нечётное число},\\ &-d^m\varphi(0)+\frac{1}{a^{\alpha_0}}\mu^{(1)}(0)-\frac{\alpha_0}{2}\partial_{x_0}^{\alpha_0-2}\partial_{x_1}^{\alpha_1}f(0,0)=0, \quad \alpha_0-\text{чётное число}.\end{aligned} \tag{29}$$

Т е о р е м а 2. *Пусть* $m \geq 2$. *Если функции* $\varphi \in C^m([0,l])$, $\psi \in C^{m-1}([0,l])$, $\tilde{\mu}^{(1)} \in C^1([0,\infty))$, $\tilde{\mu}^{(2)} \in C^m([0,\infty))$, $f \in C^{m-2,m-1}(\bar{Q})$, *то существует единственное из класса* $C^m(\bar{Q})$ *классическое решение и вида (4), (11) тогда и только тогда, когда выполняются однородные условия согласования (28), (29), константы* $C^{(i)} = C^{(i,k)}$, $k = 1,2,3,\ldots$, $i = \overline{0,|\alpha|-1}$, *вычисляются по формулам (16), где частное решение v определяется формулами (7)–(9), решение* $u^{(0)}$ *задачи (5), (2), (10) – формулами (11), (12), (16), (17).*

Заключение. В данном сообщении получены формулы классического решения первой смешанной задачи волнового уравнения с производными высокого порядка в граничных условиях. Показано, что задача имеет единственное решение. По мнению авторов, решение задачи с граничными условиями, в которых порядок производной выше порядка уравнения, публикуется впервые.

Список использованной литературы

1. *Корзюк, В. И.* Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения колебания струны / В. И. Корзюк, Е. С. Чеб, М. С. Ширма // Докл. НАН Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 1. – С. 45–49.
2. *Корзюк, В. И.* Решение первой смешанной задачи для волнового уравнения методом характеристик / В. И. Корзюк, Е. С. Чеб, М. С. Ширма // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2009. – Т. 17, № 2. – С. 23–34.
3. *Ляжетич, Н. Л.* О классической разрешимости смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения второго порядка / Н. Л. Ляжетич // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42, № 8. – С. 1072–1077.
4. *Корзюк, В. И.* Классическое решение первой смешанной задачи одномерного волнового уравнения с условиями типа Коши / В. И. Корзюк, И. С. Козловская, С. Н. Наумовец // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2015. – № 1. – С. 17–20.
5. *Корзюк, В. И.* Классические решения в теории дифференциальных уравнений с частными производными / В. И. Корзюк, И. С. Козловская, С. Н. Наумовец // Studia i materiały EUIE w Warszawie. – 2015. – N 1(9). – S. 55–78.
6. *Корзюк, В. И.* Решение задачи Коши гиперболического уравнения для однородного дифференциального оператора в случае двух независимых переменных / В. И. Корзюк, И. С. Козловская // Докл. НАН Беларуси. – 2011. – Т. 55, № 5. – С. 9–13.
7. *Корзюк, В. И.* Решение задачи Коши для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами в случае двух независимых переменных / В. И. Корзюк, И. С. Козловская // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 5. – С. 700–709.
8. *Моисеев, Е. И.* Классическое решение задачи с интегральным условием для одномерного волнового уравнения / Е. И. Моисеев, В. И. Корзюк, И. С. Козловская // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 10. – С. 1373–1385.

Поступило в редакцию 26.10.2015